Universidade Técnica de Lisboa
Instituto Superior Técnico

Os Pontos da Topologia Sem Pontos

Pedro Martins Baptista

Tese de Licenciatura

Orientador: Prof. Pedro Resende

Setembro 2001

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

Foram vários os autores a proporem um conceito de espaço abstracto em que fosse possível estudar continuidade, destaque-se Fréchet [3]. Em 1914, Hausdorff foi o primeiro a tomar como primitiva a noção de aberto para definir um espaço. Desde então estamos habituados a pensar num espaço como algo equipado com um reticulado de subconjuntos abertos. No entanto, a relação entre os espaços topológicos e a álgebra só foi explorada mais tarde, quando foi possível construir espaços topológicos não triviais a partir de dados puramente algébricos. O teorema de representação de Stone para álgebras Booleanas foi a chave desta ligação. A teoria de reticulados passou a ser de grande relevância para o estudo destes espaços que, ao contrário do que era habitual, provinham da álgebra e não da geometria. Contudo, os objectos de estudo continuavam a ser os espaços topológicos.

Só no final dos anos cinquenta se começaram a estudar reticulados que, não sendo conjuntos de abertos de um espaço topológico, verificavam algumas das suas boas propriedades. Mais precisamente, reticulados onde a operação de ínfimo distribui sobre a operação infinitária de supremo. Estes passaram a ser vistos como uma generalização dos espaços topológicos e foram inicialmente designados por reticulados locais. Muitas das propriedades e resultados conhecidos dos espaços topológicos foram estendidos a estes novos espaços. Passou deste modo a ser possível estudar propriedades topológicas recorrendo apenas ao reticulado de abertos, isto é, fazer topologia sem pontos.

Neste trabalho estudam-se "os pontos da topologia sem pontos". A ideia geral é construir um locale tendo em vista o que queremos que sejam os pontos de um determinado espaço toplógico a ele associado, conhecido como o **espectro** do locale, por forma a pôr em evidência as intuições topológicas associadas à teoria dos locales. No capítulo 3 são estudados dois exemplos. O que se pretende é mostrar como é possível apresentar e mesmo definir um espaço topológico através de uma determinada especificação algébrica, e como os locales são o meio para o conseguir.

No desenvolvimento que se segue pressupõe-se o conhecimento de alguns conceitos e propriedades. Nomeadamente, os conceitos básicos da teoria de reticulados, por exemplo, segundo os primeiros capítulos de [2]. No capítulo 4 é utilizada a noção de reticulado de supremos, veja-se Joyal e Tierney [7]. Os principais resultados a que se recorre são resumidos de seguida.

Vamos começar por fixar alguma notação. Dados reticulados L e M denota-se por $L \times M$ o produto directo destes e por $L \amalg M$ a sua união disjunta. O topo de um reticulado completo L é denotado por 1_L e o ínfimo por 0_L.

Recorda-se que um reticulado se diz completo se existem os supremos e os ínfimos de todos os seus subconjuntos. A categoria cujos objectos são os reticulados completos e os morfismos são os mapas que preservam supremos designa-se por **SL**. Os objectos desta categoria recebem o nome de **reticulados de supremos**, ou sup-reticulados.

Se L é um sup-reticulado designamos por **dual** de L o sup-reticulado com a ordem inversa, que se denota por L^{op}. Dados reticulados L e M, o conjunto dos homomorfismos de sup-reticulados $\mathbf{SL}(L, M)$ é também um sup-reticulado, com a relação de ordem definida ponto a ponto. Este é ordem-isomórfico a $\mathbf{SL}(M^{op}, L^{op})$. Existe um isomorfismo óbvio $L^{op} \cong \mathbf{SL}(2, L^{op})$, onde 2 denota um sup-reticulado com dois elementos. Assim, podemos concluir que $L^{op} \cong \mathbf{SL}(L, 2)$, uma vez que $2 \cong 2^{op}$.

Sejam L, M e N sup-reticulados. Um bimorfismo de sup-reticulados é uma aplicação $h : L \times M \to N$ que preserva supremos em cada variável separadamente, isto é, $h(\bigvee_i x_i, y) = \bigvee_i h(x_i, y)$ e $h(x, \bigvee_i y_i) = \bigvee_i h(x, y_i)$. Em **SL** existe o **produto tensorial** de dois sup-reticulados que se denota por $L \otimes M$ e, à semelhança do que se passa entre espaços vectoriais, é a imagem de um bimorfismo universal. Isto é, existe um bimorfismo $f : L \times M \to L \otimes M$ tal que, dado outro bimorfismo $g : L \times M \to N$, existe um único homomorfismo de sup-reticulados $g^{\#} : L \otimes M \to N$ que verifica $f \circ g^{\#} = g$.

Capítulo 2

Locales

Neste capítulo vamos dar as definições básicas e os principais conceitos subjacentes ao estudo dos locales. São introduzidas as propriedades e resultados que se referem nos capítulos seguintes. A totalidade dos conceitos aqui apresentados pode ser encontrada em [5].

2.1 Definições básicas

Definição 2.1 Um **locale** L é um reticulado completo onde se verifica

$$a \wedge \bigvee S = \bigvee \{a \wedge s | s \in S\}$$

para todo $a \in L$ e $S \subset L$.

Definição 2.2 Um **homomorfismo de locales** é uma aplicação entre locales $f : L \to M$ que preserva supremos arbitrários, ínfimos binários e o elemento topo 1_L, isto é:

$$f(\bigvee S) = \bigvee f[S],\ f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b) \text{ e } f(1_L) = 1_M$$

para todo a, $b \in L$ e $S \subset L$.

Designaremos por **Loc** a categoria que tem como objectos os locales e como morfismos os homomorfismos de locales.

Acabámos de definir um objecto de natureza algébrica. No entanto a motivação para o estudo dos locales é de natureza topológica. Dado um espaço topológico X, o conjunto $\Omega(X)$ dos abertos do espaço forma um reticulado completo onde a intersecção distribui sobre uniões arbitrárias. Assim, o reticulado de abertos de qualquer espaço topológico é um locale. Este é o primeiro exemplo que vemos e está na base do nome de *topologia sem pontos* para o estudo dos locales.

Um conceito importante em topologia é o de função contínua. Se $f : X \to Y$ é contínua é possível restringir f^{-1} a uma aplicação $\Omega(Y) \to \Omega(X)$, que preserva uniões e intersecções arbitrárias. Isto é, um homomorfismo entre os locales $\Omega(Y)$ e $\Omega(X)$. Considere-se a seguinte definição:

Definição 2.3 Sejam L e M locales. Uma **aplicação contínua** entre L e M é um homomorfismo de locales $M \to L$.

A categoria formada pelos locales e pelas aplicações contínuas entre locales vai ser designada por **Sp**. Note-se que esta é a categoria dual de **Loc**.[1]

Ω é a aplicação que transforma cada espaço topológico no locale formado pelos subconjuntos abertos. Vamos estender esta aplicação às funções contínuas, definindo $\Omega(f : X \to Y)$ como a aplicação contínua entre $\Omega(X)$ e $\Omega(Y)$ dada por f^{-1}. Assim, Ω é um functor entre **Top** (a categoria dos espaços topológicos e funções contínuas) e **Sp**.

2.2 Pontos de um locale

O passo seguinte é, dado um locale, encontrar um espaço topológico que o aproxime. Para isto vamos ter de definir o que se entende por ponto de um locale. Num espaço topológico X os pontos são identificados com as funções contínuas de $1 \to X$, onde 1 designa o espaço topológico com um só ponto. Vamos definir os pontos de um locale por analogia.

Definição 2.4 Seja L um locale. Por **ponto** de L entende-se uma aplicação contínua de $\Omega(1) = 2$ em L, isto é, um homomorfismo $p : L \to 2$. O conjunto dos pontos de L designa-se por $pt(L)$.

Para perceber melhor o que vão ser estes pontos, vamos procurar definições alternativas. Facilmente se observa que um ponto p fica completamente determinado quer pelo seu núcleo, $p^{-1}(0)$, quer pelo complementar $p^{-1}(1)$. Vamos estudar algumas propriedades destes conjuntos, começando por $p^{-1}(0)$.

Do facto de p ser um homomorfismo tem-se que:

i. o ínfimo de L pertence a $p^{-1}(0)$;

[1]Alguns autores distiguem os objectos destas duas categorias, isto é, o objecto algébrico do de natureza topológica. Nomeadamente Johnstone [5] designa os objectos da categoria dos locales e homomorfismos por *frames* ficando a designação *locale* reservada para os objectos da categoria cujos morfismos são as aplicações contínuas.

ii. dados $a, b \in p^{-1}(0)$, $a \vee b \in p^{-1}(0)$;

iii. $p^{-1}(0)$ é fechado para baixo, isto é, dados a, $b \in L$ se $a \leq b$ e $b \in p^{-1}(0)$ então $a \in p^{-1}(0)$.

A um conjunto nestas condições chama-se um **ideal**. Neste caso, verifica-se ainda:

iv. $p^{-1}(0) \neq L$.

v. dados a, $b \in L$ se $a \wedge b \in p^{-1}(0)$ então $a \in p^{-1}(0)$ ou $b \in p^{-1}(0)$.

já que $p(1_L) = 1$ e $p(a \wedge y) = p(b) \wedge p(b) = 0$ implica $p(a) = 0$ ou $p(b) = 0$. Um ideal que verifique esta condição diz-se um **ideal primo**.

Note-se que $p(\bigvee p^{-1}(0)) = 0$, donde $p^{-1}(0) = \{a \in L \mid a \leq \bigvee p^{-1}(0)\}$. Este conjunto designa-se por **ideal principal** gerado por $\bigvee p^{-1}(0)$ e escreve-se $\downarrow (\bigvee p^{-1}(0))$. Se e gera um ideal principal primo então

i'. $e \neq 1_L$

ii'. dados a, $b \in L$ se $a \wedge b \leqslant e$ então $a \leqslant e$ ou $b \leqslant e$.

A um elemento que verifique i' e ii' dá-se o nome de **elemento primo**. Podemos então fazer corresponder a cada ponto p de L o elemento primo $\bigvee p^{-1}(0)$. Por seu lado, dado um elemento primo $e \in L$, a aplicação $p : L \to 2$ definida como $p(a) = 0$ sse $a \leqslant e$ é um homomorfismo de locales e define um ponto de L. Obtemos então uma bijecção entre os pontos de um locale e os seus elementos primos.

Estudando o conjunto $p^{-1}(1)$, vemos que este verifica condições duais de i, ii e iii. Um conjunto com estas propriedades designa-se por **filtro**. Temos ainda que dado $S \in L$, se $\bigvee S \in p^{-1}(1)$ então existe $s \in S$ tal que $s \in p^{-1}(1)$. Um filtro que satisfaça esta condição diz-se um **filtro completamente primo** Mais uma vez obtemos uma bijecção, agora entre o conjunto $pt(L)$ e o conjunto dos filtros completamente primos de L.

2.3 Espacialidade

Voltando ao propósito de encontrar um espaço topológico que aproxime L, vamos para cada $a \in L$ encontrar o conjunto dos pontos que "pertencem"a a. Isto é, os pontos $p : L \to 2$ tal que $p(a) = 1$. Defina-se $\mathcal{U}_a = \{p \in pt(L) \mid p(a) = 1\}$.

Vamos ver que o conjunto $\{\mathcal{U}_a \mid a \in L\} \subseteq \wp(pt(L))$ é uma topologia sobre $pt(L)$:

$$\mathcal{U}_{1_L} = \{p \mid p(1_L) = 1\} = pt(L)$$

$$\mathcal{U}_{0_L} = \{p \mid p(0_L) = 1\} = \emptyset$$

$$\begin{aligned} p \in \bigcup_a \mathcal{U}_a & \Leftrightarrow \exists a \, p(a) = 1 \\ & \Leftrightarrow \bigvee_a p(a) = 1 \\ & \Leftrightarrow p(\bigvee_a a) = 1 \\ & \Leftrightarrow p \in \mathcal{U}_{(\bigvee_a a)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p \in \mathcal{U}_a \cap \mathcal{U}_b & \Leftrightarrow p \in \mathcal{U}_a \text{ e } p \in \mathcal{U}_b \\ & \Leftrightarrow p(a) = 1 \text{ e } p(b) = 1 \\ & \Leftrightarrow p(a \wedge b) = 1 \\ & \Leftrightarrow p \in \mathcal{U}_{a \wedge b} \end{aligned}$$

Assim, definimos $\Omega(pt(L)) = \{\mathcal{U}_a \mid a \in L\}$ e passamos a considerar $pt(L)$ um espaço topológico. Vamos estender pt às aplicações contínuas entre locales. Considerem-se os locales L e M e uma aplicação contínua $L \to M$ dada pelo homomorfismo $u : M \to L$. Definimos $pt(u) : pt(L) \to pt(M)$ como $pt(u)(p : L \to 2) = (p \circ u)$. Veja-se que $pt(u)$ é uma função contínua: se $x \in M$ então $pt(u)^{-1}(\mathcal{U}_x) = \{p \in pt(L) \mid (p \circ u)(x) = 1\} = \mathcal{U}_{u(x)}$. Temos então que pt é um functor entre **Sp** e **Top**, que é adjunto direito do functor Ω [5, pág. 42].

Vamos aqui observar algumas propriedades de $\mathcal{U}_{(\_)}$.

Proposição 2.5 *$\mathcal{U}_{(\_)} : L \to \Omega(pt(L))$ é um homomorfismo de locales sobrejectivo.*

Prova. Já foi visto que $\mathcal{U}_{(\_)}$ preserva supremos, ínfimos binários e o supremo de L, logo é um homomorfismo de locales. A sobrejectividade é imediata da definição de $\Omega(pt(L))$. □

Podemos definir agora um conceito importante em teoria dos locales.

Definição 2.6 Um locale L diz-se **espacial** se e só se $\mathcal{U}_{(\_)}$ é injectivo.

Note-se que se L é espacial então é isomorfo a $\Omega(pt(L))$, uma vez que $\mathcal{U}_{(\_)}$ é um homomorfismo de locales bijectivo. A proposição seguinte dá-nos uma condição necessária e suficiente para que um locale seja espacial.

Proposição 2.7 *Um locale L é espacial se e só se*

$$\forall a,\, b \in L \;\; a \nleq b \Rightarrow [\exists p \in pt(L) \quad p(a) = 1 \text{ e } p(b) = 0].$$

Prova. Seja L um locale espacial e considerem-se a, $b \in L$ tal que $a \nleq b$

$$\begin{aligned} a \wedge b &\neq a, \text{ donde} \\ \mathcal{U}_{a \wedge b} &\neq \mathcal{U}_a, \text{ porque } \mathcal{U}_{(\_)} \text{ é injectivo.} \\ \text{i.e., } \mathcal{U}_a \cap \mathcal{U}_b &\neq \mathcal{U}_a \\ \text{logo, } \mathcal{U}_a &\nsubseteq \mathcal{U}_b. \end{aligned}$$

Logo existe $p \in pt(L)$ tal que $p(a) = 1$ e $p(b) = 0$.

Para a implicação inversa, veja-se que, dados a, $b \in L$ com $a \neq b$, tem-se $a \vee b \nleq a \wedge b$, donde existe $p \in pt(L)$ tal que:

$$p(a \vee b) = p(a) \vee p(b) = 1$$

$$p(a \wedge b) = p(a) \wedge p(b) = 0$$

donde $p(a) \neq p(b)$. Assim, $\mathcal{U}_a \neq \mathcal{U}_b$, o que mostra que $\mathcal{U}_{(\_)}$ é injectivo. $\square$

Considere-se agora um espaço topológico qualquer X. Vamos ver que $\Omega(X)$ é sempre espacial.

Sejam O_1 e $O_2 \in \Omega(X)$. Se $O_1 \nsubseteq O_2$ então existe $x \in X$ tal que $x \in O_1$ e $x \notin O_2$. Definindo

$$\begin{aligned} &p_x : \Omega(X) \to 2 \\ &p_x(O) = 1 \text{ sse } x \in O, \end{aligned}$$

obtem-se um homomorfismo de locales e temos $p_x(O_1) = 1$ e $p_x(O_2) = 0$. Assim, pela Proposição 2.7, $\Omega(X)$ é espacial. Podemos portanto concluir:

Proposição 2.8 *Um locale é espacial se e só se é isomorfo ao reticulado de abertos de algum espaço topológico.*

2.4 Espaços sóbrios

Vamos estudar agora como relacionar um espaço X com o espaço $pt(\Omega(X))$. Já vimos que os pontos de um locale estão em bijecção com os elementos primos. No caso em que o locale é o conjunto de abertos de um espaço topológico X, podemos encontrar outra caracterização para os pontos. Estes podem ser vistos como conjuntos **fechados irredutíveis**, isto é, fechados $F \subseteq X$ que não podem ser escritos como $F = F_1 \cup F_2$ onde F_1 e F_2 são ambos fechados e subconjuntos próprios de F. Dado um elemento primo $O \in \Omega(X)$, vamos mostrar que o seu complementar é um fechado irredutível. Supondo que $\overline{O} = F_1 \cup F_2$ com F_1 e F_2 fechados, temos $\overline{F_1 \cup F_2} = \overline{F_1} \cap \overline{F_2} = O$. Como O é elemento primo, $\overline{F_1} \subseteq O$ ou $\overline{F_2} \subseteq O$. Ou seja, $F_1 = \overline{O}$ ou $F_2 = \overline{O}$, donde $\overline{O}$ é um fechado irredutível. E se F é um fechado irredutível então $\overline{F}$ é primo, donde os pontos de $\Omega(X)$ são identificados com os fechados irredutíveis.

Seja $x \in X$. Uma vez que o fecho de $\{x\}$, $cl(x)$, é um fechado irredutível, podemos definir a aplicação:

$$\begin{aligned} \Psi : X &\rightarrow pt(\Omega(X)) \\ x &\mapsto p_x \end{aligned}$$

onde $p_x : \Omega(X) \rightarrow 2$ é tal que $\overline{\bigcup {p_x}^{-1}(0)} = {p_x}^{-1}(1) = cl(x)$.

Definição 2.9 *Um espaço X diz-se **sóbrio** se e só se Ψ é um homeomorfismo.*

Se X é um espaço sóbrio, conhecendo apenas o reticulado de abertos podemos recuperar o conjunto de pontos, já que $X \cong pt(\Omega(X))$. Isto é, toda a caracterização do espaço está contida nos abertos.

A Proposição 2.10 fica como referência para ser utilizada adiante.

Proposição 2.10 *Seja L um locale. O espaço $pt(L)$ é sóbrio.*

Para uma demonstração deste resultado pode consultar-se Johnstone [5, pág. 44]. O espaço $pt(L)$ é desigando por **espectro** de L. Ao espaço $pt(\Omega(X))$ chama-se a **sobrificação** de X. Temos ainda:

Proposição 2.11 *Seja X um espaço topológico. X é sóbrio se e só se é homeomorfo ao espectro de algum locale.*

A demonstração deste resultado é imediata.

2.5 Regularidade

A noção de locale regular corresponde à de espaço regular. Antes de a apresentar temos que introduzir uma nova definição. Sejam a, b elementos de um locale L. Dizemos que a está **bem dentro** de b, o que se denota por $a \lll b$, se e só se existe um elemento $c \in L$ tal que

$$a \wedge c = 0_L \text{ e } c \vee b = 1_L.$$

Em [5, pág. 80] são apresentadas algumas propriedades desta relação. Abaixo apresentam-se aquelas que vão ter relevância mais à frente.

Lema 2.12 *Sejam a, b, c, $d \in L$*

(1) *Se $a \lll b$ então $a \leqslant b$.*

(2) *Se $a \leqslant b \lll c \leqslant d$ então $a \lll d$.*

Prova. A prova de (1) é imediata. Em (2) veja-se que o mesmo elemento que atesta que $b \lll c$ prova que $a \lll d$. □

Definição 2.13 Um locale L diz-se **regular** se e só se para todo o elemento $a \in L$ se tem $a = \bigvee\{b \mid b \lll a\}$.

Se o locale é da forma $\Omega(X)$ então esta propriedade afirma que qualquer aberto O é a união dos abertos cujo fecho está contido em O, o que é equivalente à definição de regularidade num espaço topológico.

A proposição abaixo vai ser utilizada mais à frente neste trabalho.

Proposição 2.14 *Sejam L e M locales tais que L é regular e considere-se um homomorfismo de locales $h : L \to M$. Então h é injectivo se e só se é* ***codenso****, isto é, $h(a) = 1_M$ implica $a = 1_L$.*

Prova. Se h é injectivo é imediato que é codenso, uma vez que $h(1_L) = 1_M$. Para a implicação inversa vamos mostrar o contra-recíproco. Tomemos dois elementos distintos a, $b \in L$ tais que $h(a) = h(b)$. Sem perda de generalidade podemos supor $a \not\leqslant b$. Uma vez que L é regular tem-se $a = \bigvee\{x \mid x \lll a\}$, donde existe x tal que $x \lll a$ mas $x \not\leqslant b$. Seja c um elemento que atesta $x \lll a$, isto é, tal que $x \wedge c = 0_L$ e $c \vee a = 1_L$. Note-se então que

$$h(c \vee b) = h(c) \vee h(b) = h(c) \vee h(a) = h(c \vee a) = 1_M.$$

No entanto $c \vee b \neq 1_L$, porque $x \not\leqslant b$ e $x \wedge c = 0_L$, donde h não é codenso. □

2.6 Aspectos algébricos

Nesta secção vamos estudar algumas das propriedades algébricas dos locales. Um dos aspectos mais importantes é a possibilidade de apresentar objectos por geradores e relações. Não vamos trabalhar com uma construção explícita mas utilizar a caracterização através da propriedade universal.

Proposição 2.15 *Dados conjuntos G e R, de geradores e relações respectivamente, existe um locale L e uma aplicação $[\_] : G \to L$ que respeita as relações em R e que verifica: para todo o locale M e aplicação $f : G \to M$ que respeite R existe um único homomorfismo de locales*

$$f^{\#} : L \to M$$

tal que o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "{[\_]}"] \arrow[dr, "f"'] & L \arrow[d, dashed, "f^{\#}"] \\ & M \end{tikzcd}$$

*L diz-se o **locale apresentado** por G e R e denota-se por $\mathbf{Loc}\langle G|R\rangle$. Quando o conjunto de relações é vazio dizemos que L é **livremente gerado** por G.*

A primeira observação vai para o que se entende por um conjunto de relações. Vamos escrever as relações como equações entre termos construídos a partir de $[x]$ $(x \in G)$ e das operações de ínfimo finito e supremo. Dizer que a injecção de geradores verifica estas relações significa apenas que as equações são verdadeiras. Uma outra função verifica as relações se o mesmo se passa quando substituimos $[\_]$ pela função.

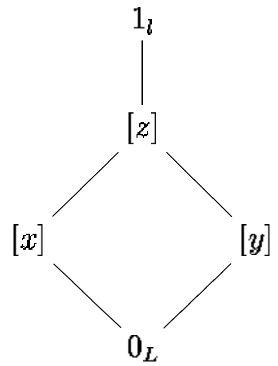
É possível encontrar diferentes construções de $\mathbf{Loc}\langle G|R\rangle$. Como já foi dito, neste trabalho não nos vamos prender com nenhuma, no entanto ficam algumas referências. Em Johnstone [5] este locale é definido através de *relações de cobertura*. A ideia é considerar que os geradores formam um semi-reticulado de ínfimos, e aqui definir uma relação que indica para cada elemento quais os conjuntos que o têm como supremo. É necessário que esta relação verifique certas propriedades. A mesma construção é feita em Vickers [9] onde são explicadas as ideias da álgebra universal subjacentes a uma apresentação por geradores e relações e como as adaptar ao caso dos locales. Também podemos construir o mesmo objecto considerando o locale livremente gerado por G e tomando um quociente. Para isto é necessário o conceito de *núcleo* que, mais uma vez, pode ser encontrado em Johnstone [5].

Outra observação a fazer prende-se com o que são os pontos de um locale apresentado por geradores e relações. Aqui, os pontos podem ser vistos como aplicações do conjunto de geradores em 2 e que respeitam as relações. Isto é uma consequência simples da propriedade universal que mais tarde vai ser utilizada para caracterizar pontos de locales assim apresentados.

Exemplo Seja $L = \mathbf{Loc}\langle G|R\rangle$ onde G é o conjunto $\{x, y, z\}$ e como única relação temos

$$[x] \vee [y] = [z].$$

É simples ver, através da propriedade universal, que este locale tem cinco elementos sendo a relação de ordem dada pelo diagrama abaixo.



Vamos ver quais são os pontos deste locale. Considere-se uma aplicação $p : G \to 2$ que satisfaz a relação $p(x) \vee p(y) = p(z)$. Se $p(z) = 0$ então $p(x) = p(y) = 0$. Se $p(z) = 1$ então existem três hipóteses: $p(x) = 1$ e $p(y) = 0$, ou $p(x) = 0$ e $p(y) = 1$, ou $p(x) = p(y) = 1$. Assim, este locale tem quatro pontos p_1, p_2, p_3 e p_4, descritos na tabela abaixo:

	p_1	p_2	p_3	p_4
x	0	0	1	1
y	0	1	0	1
z	0	1	1	1

Temos então,

$$\begin{aligned} pt(L) &= \{p_1, p_2, p_3, p_4\} \\ \Omega(pt(L)) &= \{\mathcal{U}_{0_L}, \mathcal{U}_{[y]}, \mathcal{U}_{[x]}, \mathcal{U}_{[z]}, \mathcal{U}_{1_L}\} \\ &= \{\emptyset, \{p_2, p_4\}, \{p_3, p_4\}, \{p_2, p_3, p_4\}, \{p_1, p_2, p_3, p_4\}\}. \end{aligned}$$

Note-se que $\Omega(pt(L))$ é isomorfo a L, donde se conclui que L é espacial.

2.7 Locales coerentes

Este conceito está relacionado com o facto de a completação por ideais[2] de um reticulado distributivo limitado D ser um locale, que se designa por $Idl(D)$. Veja-se que os pontos deste podem ser identificados com os ideais primos de D. A demonstração dos resultados desta secção é remetida para [5, págs. 62 a 66].

Lema 2.16 *Para qualquer reticulado D, os elementos primos de $Idl(D)$ são os ideais primos de D.*

Considere-se então a seguinte definição:

Definição 2.17 Um locale L diz-se **coerente** se e só se é isomorfo à completação por ideais de um reticulado distributivo limitado.

Embora esta não seja a definição apresentada por Johnstone em [5, pág. 64], ela é equivalente. A proposição abaixo é um resultado importante para locales coerentes que nos dá uma condição suficiente para justificar que um locale é espacial.

Proposição 2.18 *Todo o locale coerente é espacial.*

Um dos aspectos importantes acerca deste resultado prende-se com as apresentações por geradores (G) e relações (R) em que as relações não envolvem operações de supremo infinitárias. Se este é o caso podemos considerar o reticulado distributivo limitado apresentado por G e R, que se designa por $\mathbf{BDL}\langle G|R\rangle$. Temos que $Idl(\mathbf{BDL}\langle G|R\rangle) \cong \mathbf{Loc}\langle G|R\rangle$. Assim, um locale apresentado por geradores e relações sem recorrer a supremos infinitos é coerente; logo, pela Proposição 2.18 é espacial.

Voltando ao exemplo da secção anterior, podemos agora justificar que o locale apresentado é espacial de um modo mais simples. Uma vez que não se utilizam supremos infinitários para descrever as relações ele é coerente, logo espacial.

[2]Por completação por ideais de D entendemos o reticulado completo $Idl(D) = \{I \mid I$ é um ideal de $D\}$.

Capítulo 3

Exemplos

Vamos ver dois exemplos de construção de locales. Ambos são espaços bem conhecidos aqui apresentados no contexto da topologia sem pontos. No entanto, não vamos perder de vista quais queremos que sejam os pontos destes espaços. O que é aqui exemplificado é como a teoria dos pontos de um espaço pode ser feita de forma a que a topologia surja naturalmente. O primeiro exemplo é a recta real. Este pode ser encontrado na bibliografia, onde se destaca [1] e [10]. O segundo exemplo é o conjunto ternário de Cantor.

3.1 Números Reais

Nesta secção vamos apresentar os números reais no contexto da topologia sem pontos. Por número real entendemos um corte de Dedekind dos racionais, isto é, um par (L, R) com $L, R \subseteq \mathbb{Q}$ onde:

i. $L \neq \emptyset$;

ii. $\forall q \in \mathbb{Q}\ (q \in L \Leftrightarrow \exists q' \in \mathbb{Q} \quad q' > q \text{ e } q' \in L)$;

iii. $R \neq \emptyset$;

iv. $\forall q \in \mathbb{Q}\ (q \in R \Leftrightarrow \exists q' \in \mathbb{Q} \quad q' < q \text{ e } q' \in R)$;

v. $L \cap R = \emptyset$;

vi. $\forall q, r \in \mathbb{Q}$ tal que $q < r$ temos $q \in L$ ou $r \in R$.

O objectivo é encontrar um locale cujos pontos sejam identificáveis com os números reais. Vamos definir este locale através de geradores e relações. Considere-se então o locale $L_{\mathbb{R}}$ gerado pelos símbolos "$q \varepsilon L$"e "$q \varepsilon R$", com $q \in \mathbb{Q}$, e onde a injecção de geradores $[\_] : G \to L_{\mathbb{R}}$ verifica as relações i' a vi' apresentadas na página seguinte.

i'. $\bigvee_q [q\varepsilon L] = 1_{L_{\mathbb{R}}}$;

ii'. $[q\varepsilon L] = \bigvee_{q'>q} [q'\varepsilon L]$;

iii'. $\bigvee_q [q\varepsilon R] = 1_{L_{\mathbb{R}}}$;

iv'. $[q\varepsilon R] = \bigvee_{q'<q} [q'\varepsilon R]$;

v'. $[q\varepsilon L] \wedge [q\varepsilon R] = 0$;

vi'. $\forall q, r \in \mathbb{Q}$ tal que $q < r$ temos $[q\varepsilon L] \vee [r\varepsilon R] = 1_{L_{\mathbb{R}}}$.

Existem semelhanças entre os axiomas que definem um corte de Dedekind e as relações acima. Na realidade vamos ver que estas relações não são mais do que uma tradução destes axiomas.

Recordamos que os pontos de um locale apresentado por geradores e relações são as aplicações do conjunto de geradores em 2 que respeitam as relações. Neste caso os pontos de $L_{\mathbb{R}}$ são as aplicações $G \to 2$ que respeitam as condições i' a vi'. Considere-se um ponto $p : G \to 2$. O que temos é uma função que atribui "valores lógicos" a cada elemento do conjunto de geradores. Se é nosso objectivo que este locale tenha como pontos os números reais, podemos pensar que se p dá valor 1 a "$q\varepsilon L$", então estamos a definir um número real (L, R) tal que $q \in L$. Analogamente, se $p(q\varepsilon R) = 1$ então $q \in R$. Assim definam-se

$$L_p = \{q \in \mathbb{Q} \mid p(q\varepsilon L) = 1\}$$

$$R_p = \{q \in \mathbb{Q} \mid p(q\varepsilon R) = 1\}.$$

Proposição 3.1 *O par (L_p, R_p) é um corte de Dedekind.*

Prova. Para o mostrar vamos ver que verifica cada uma das condições i a vi.

i. $\bigvee_q p(q\varepsilon L) = 1$, donde $\exists q\ p(q\varepsilon L) = 1$, ou seja $\exists q\ q \in L_p$, isto é $L_p \neq \emptyset$.

ii. $$\begin{aligned} \forall q \in \mathbb{Q} \quad q \in L_p &\Leftrightarrow p(q\varepsilon L) = 1 \\ &\Leftrightarrow \textstyle\bigvee_{q'>q} p(q'\varepsilon L) = 1 \\ &\Leftrightarrow \exists q' > q \quad q' \in L_p. \end{aligned}$$

iii. $\bigvee_q p(q\varepsilon R) = 1$, donde $\exists q\ p(q\varepsilon R) = 1$, ou seja $\exists q\ q \in R_p$, isto é $R_p \neq \emptyset$.

iv. $$\begin{aligned} \forall q \in \mathbb{Q} \quad q \in R_p &\Leftrightarrow p(q\varepsilon L) = 1 \\ &\Leftrightarrow \textstyle\bigvee_{q'<q} p(q'\varepsilon R) = 1 \\ &\Leftrightarrow \exists q' < q \quad q' \in R_p. \end{aligned}$$

v. Seja $q \in L_p \cap R_p$, então $p(q\varepsilon L) = p(q\varepsilon R) = 1$,
$p(q\varepsilon L) \wedge p(q\varepsilon R) = 1$,
o que é absurdo dado que p satisfaz v'.
Logo, $L \cap R = \emptyset$.

vi. Seja $q, r \in \mathbb{Q}$ tal que $q < r$. Por vi' temos $p(q\varepsilon L) \vee p(r\varepsilon R) = 1$.
Logo, $q \in L_p$ ou $r \in R_p$

Uma vez verificadas todas as condições, podemos concluir que o par (L_p, R_p) constitui um corte de Dedekind. $\square$

Assim, defina-se a aplicação

$$\begin{array}{rcl} f : pt(L_{\mathbb{R}}) & \to & \mathbb{R} \\ p & \mapsto & (L_p, R_p) \end{array}$$

Vamos em seguida estudar esta aplicação, nomeadamente, vendo que é um homeomorfismo.

Proposição 3.2 *$pt(L_{\mathbb{R}})$ é homeomorfo a $\mathbb{R}$.*

Prova. Começamos por mostrar que f é uma aplicação bijectiva. Da definição é imediato que f é injectiva. Vamos mostrar que também é sobrejectiva. Dado um número real (L, R), defina-se $p : G \to 2$ tal que $p^{-1}(1) = \{q\varepsilon L \mid q \in L\} \cup \{q\varepsilon R \mid q \in R\}$. Vamos ver que p satisfaz as relações i' a vi'.

i'. Como $L \neq \emptyset$ existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $p(q\varepsilon L) = 1$.
Logo $\bigvee_q p(q\varepsilon L) = 1$.

ii'. $\forall q \in \mathbb{Q} \quad p(q\varepsilon L) = 1 \Leftrightarrow q \in L$
$\Leftrightarrow \exists q' \in \mathbb{Q} \quad q' > q$ e $q' \in L$
$\Leftrightarrow \bigvee_{q'>q} p(q'\varepsilon L) = 1$.
Assim $p(q\varepsilon L) = \bigvee_{q'>q} p(q'\varepsilon L)$.

iii'. Como $R \neq \emptyset$ existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $p(q\varepsilon R) = 1$.
Logo $\bigvee_q p(q\varepsilon R) = 1$.

iv'. $\forall q \in \mathbb{Q} \quad p(q\varepsilon R) = 1 \Leftrightarrow q \in R$
$\Leftrightarrow \exists q' \in \mathbb{Q} \quad q' < q$ e $q' \in R$
$\Leftrightarrow \bigvee_{q'<q} p(q'\varepsilon L) = 1$.
Assim $p(q\varepsilon L) = \bigvee_{q'<q} p(q'\varepsilon L)$.

v'. Uma vez que $L \cap R = \emptyset$ tem-se $p(q\varepsilon L) \wedge p(q\varepsilon R) = 0$.

vi'. Seja $q, r \in \mathbb{Q}$ tal que $q < r$. Por vi $q \in L$ ou $r \in R$.
Logo $p(q\varepsilon L) \vee p(r\varepsilon R) = 1$.

Assim, $p \in pt(L_{\mathbb{R}})$ e $f(p) = (L, R)$.

Antes de prosseguir note-se que o aberto de $\mathbb{R}$ $]q, +\infty[$ é constituído pelos reais (L, R) tais que $q \in L$. Ou seja, as imagens por f de pontos $p \in pt(L_{\mathbb{R}})$ tais que $p(q\varepsilon L) = 1$. Logo,

$$]q, +\infty[= f(\{p \mid p(q\varepsilon L) = 1\}).$$

Analogamente,

$$]-\infty, q[= f(\{p \mid p(q\varepsilon R) = 1\}).$$

É agora necessário mostrar que f é uma função contínua e aberta.

Seja $O \in \Omega\mathbb{R}$ (onde $\Omega\mathbb{R}$ designa a topologia usual em $\mathbb{R}$), recordemos que este pode ser escrito como $O = \bigcup_i]q_i, +\infty[\cap]-\infty, r_i[$, onde $q_i, r_i \in \mathbb{Q}$. Uma vez que f^{-1} preserva uniões e intersecções,

$$f^{-1}(O) = \bigcup_i f^{-1}(]q_i, +\infty[) \cap f^{-1}(]-\infty, r_i[).$$

Assim, para mostrar que $f^{-1}(O)$ é um aberto basta mostrar que $f^{-1}(]q, +\infty[)$ e $f^{-1}(]-\infty, q[)$ são abertos, para todo $q \in \mathbb{Q}$. Veja-se então:

$$\begin{aligned} f^{-1}(]q, +\infty[) &= \{p \mid f(p) = (L_p, R_p) \in]q, +\infty[\} \\ &= \{p \mid q \in L_p\} \\ &= \{p \mid p([q\varepsilon L]) = 1\} \\ &= \mathcal{U}_{[q\varepsilon L]} \in \Omega pt(L_{\mathbb{R}}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(]-\infty, q[) &= \{p \mid f(p) = (L_p, R_p) \in]-\infty, q[\} \\ &= \{p \mid q \in R_p\} \\ &= \{p \mid p([q\varepsilon R]) = 1\} \\ &= \mathcal{U}_{[q\varepsilon R]} \in \Omega pt(L_{\mathbb{R}}) \end{aligned}$$

Considere-se agora $a \in L_{\mathbb{R}}$ e $\mathcal{U}_a$ um aberto de $pt(L_{\mathbb{R}})$. Podemos escrever a a partir dos geradores e das operações de supremo e infimo binário. Uma vez que $\mathcal{U}_{(\_)}$ é um homomorfismo de locales e transforma os supremos em uniões e os infimos em intersecções, $\mathcal{U}_a$ pode ser escrito a partir dos abertos

$\mathcal{U}_g$, onde g é um gerador, à custa de uniões e intersecções finitas. Por outras palavras, o conjuntos dos abertos $\mathcal{U}_g$ forma uma sub base da topologia.

Queremos mostrar que $f(\mathcal{U}_a)$ é um aberto de $\mathbb{R}$; como f preserva uniões e intersecções, porque é injectiva, basta ver que $f(\mathcal{U}_{[q\varepsilon L]})$ e $f(\mathcal{U}_{[q\varepsilon R]})$ são abertos, para todo $q \in \mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned}
f(\mathcal{U}_{[q\varepsilon L]}) &= \{f(p) \mid p([q\varepsilon L]) = 1\} \\
&= \{(L_p, R_p) \mid [q\varepsilon L] \in L_p\} \\
&= \{(L_p, R_p) \mid (L_p, R_p) \in]q, +\infty[\} \\
&=]q, +\infty[
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(\mathcal{U}_{[q\varepsilon R]}) &= \{f(p) \mid p([q\varepsilon R]) = 1\} \\
&= \{(L_p, R_p) \mid [q\varepsilon R] \in R_p\} \\
&= \{(L_p, R_p) \mid (L_p, R_p) \in]-\infty, q[\} \\
&=]-\infty, q[
\end{aligned}$$

Logo, $f : pt(L_{\mathbb{R}}) \to \mathbb{R}$ é um homeomorfismo. □

Temos assim uma outra forma de definir os números reais, apresentando-os como o espaço $pt(L_{\mathbb{R}})$. Note-se que esta não pressupõe nenhum conhecimento de $\mathbb{R}$ e pode ser tomada como definição, juntando-se às construções clássicas.

Vamos ver mais algumas propriedades do locale $L_{\mathbb{R}}$.

Proposição 3.3 *$L_{\mathbb{R}}$ é regular.*

Prova. Seja $x \in L_{\mathbb{R}}$, queremos mostrar que $x = \bigvee\{y \mid y \lessdot x\}$. Genericamente um elemento de $L_{\mathbb{R}}$ é da forma

$$\bigvee_i [q_{i_1}\varepsilon L] \wedge \ldots \wedge [q_{i n_i}\varepsilon L] \wedge [r_{i_1}\varepsilon R] \wedge \ldots \wedge [r_{i m_i}\varepsilon R].$$

No entanto, uma vez que a ordem em $\mathbb{Q}$ é total e pelas condições ii' e iv', podemos escrever x como

$$x = \bigvee_i [q_i\varepsilon L] \wedge [r_i\varepsilon R].$$

Vamos ver que $[q_i\varepsilon L] \wedge [r_i\varepsilon R] = \bigvee\{y \mid y \lessdot [q_i\varepsilon L] \wedge [r_i\varepsilon R]\}$.

Considere-se o conjunto $\{[q'\varepsilon L] \wedge [r'\varepsilon R] \mid q' > q_i \text{ e } r' < r_i\}$. Note-se que, se $[q'\varepsilon L] \wedge [r'\varepsilon R]$ pertence a este conjunto, então

$$[q'\varepsilon L] \wedge [r'\varepsilon R] \lessdot [q_i\varepsilon L] \wedge [r_i\varepsilon R],$$

já que, por v',

$$([q'\varepsilon L] \wedge [r'\varepsilon R]) \wedge ([r'\varepsilon L] \vee [q'\varepsilon R]) = 0$$

e, por vi',

$$([q_i\varepsilon L] \wedge [r_i\varepsilon R]) \vee ([r'\varepsilon L] \vee [q'\varepsilon R]) = 1.$$

Veja-se ainda que, pelas condições ii' e iv', temos

$$[q_i\varepsilon L] \wedge [r_i\varepsilon R] = (\bigvee_{q'>q_i} [q'\varepsilon L]) \wedge (\bigvee_{r'<r_i} [r'\varepsilon R]) = \bigvee_{q'>q_i} \bigvee_{r'<r_i} ([q'\varepsilon L] \wedge [r'\varepsilon R]).$$

Pelo que $\bigvee\{[q'\varepsilon L] \wedge [r'\varepsilon R] \mid q' > q_i \text{ e } r' < r_i\} = [q_i\varepsilon L] \wedge [r_i\varepsilon R]$ e podemos concluir

$$[q_i\varepsilon L] \wedge [r_i\varepsilon R] = \bigvee\{y \mid y \leqslant [q_i\varepsilon L] \wedge [r_i\varepsilon R]\}.$$

Note-se agora que, uma vez que $\{y \mid y \leqslant [q_i\varepsilon L] \wedge [r_i\varepsilon R]\} \subseteq \{y \mid y \leqslant x\}$,

$$x = \bigvee_i (\bigvee\{y \mid y \leqslant [q_i\varepsilon L] \wedge [r_i\varepsilon R]\}) \leqslant \bigvee\{y \mid y \leqslant x\} \leqslant x.$$

Assim, $x = \bigvee\{y \mid y \leqslant x\}$. □

Proposição 3.4 *$L_{\mathbb{R}}$ é isomorfo a $\Omega\mathbb{R}$.*

Prova. Considere-se a aplicação h definida abaixo.

$$\begin{aligned} h : G &\to \Omega\mathbb{R} \\ q\varepsilon L &\mapsto]q, +\infty[\\ q\varepsilon R &\mapsto]-\infty, q[\end{aligned}$$

Vamos ver que esta satisfaz as relações i' a vi'. Note-se que o topo de $\Omega\mathbb{R}$ é $\mathbb{R}$.

i'. $\bigvee_q h(q\varepsilon L) = \bigvee_q]q, +\infty[= \mathbb{R}$;

ii'. $h(q\varepsilon L) =]q, +\infty[= \bigvee_{q'>q}]q', +\infty[= \bigvee_{q'>q} h(q'\varepsilon L)$;

iii'. $\bigvee_q h(q\varepsilon R) = \bigvee_q]-\infty, q[= \mathbb{R}$;

iv'. $h(q\varepsilon R) =]-\infty, q[= \bigvee_{q'<q}]-\infty, q'[= \bigvee_{q'<q} h(q'\varepsilon R)$;

v'. $h(q\varepsilon L) \wedge h(q\varepsilon R) =]q', +\infty[\cap]-\infty, q[= \emptyset$;

vi'. $\forall q, r \in \mathbb{Q}$ tal que $q < r$ temos $h(q\varepsilon L) \vee h(r\varepsilon R) =]q, +\infty[\cup]-\infty, r[= \mathbb{R}$.

Pela propriedade universal da apresentação por geradores e relações de $L_{\mathbb{R}}$ existe um único homomorfismo de locales

$$h^{\#} : L_{\mathbb{R}} \to \Omega\mathbb{R}$$

tal que $h^{\#} \circ [\_] = h$. Vamos ver que este é uma bijecção.

Seja $O = \bigcup_i]q_i, +\infty[\cap]-\infty, r_i[\in \Omega\mathbb{R}$. Considere-se o elemento $\bigvee_i [q_i\varepsilon L] \wedge [r_i\varepsilon R]$ de $L_{\mathbb{R}}$, veja-se que $h^{\#}(\bigvee_i [q_i\varepsilon L] \wedge [r_i\varepsilon R]) = \bigcup_i h(q_i\varepsilon L) \cap h(r_i\varepsilon R) = O$. Logo, $h^{\#}$ é sobrejectiva.

Para mostrar a injectividade vamos recorrer à Proposição 2.14, já que $L_{\mathbb{R}}$ é regular (Proposição 3.3). Assim, basta mostrar que $h^{\#}$ é codenso, isto é, que se $h^{\#}(x) = \mathbb{R}$ então $x = 1_{L_{\mathbb{R}}}$. Tome-se $x \in L_{\mathbb{R}}$ tal que $h^{\#}(x) = \mathbb{R}$. Podemos escrever x como

$$x = \bigvee\{[q\varepsilon L] \wedge [r\varepsilon R] \mid [q\varepsilon L] \wedge [r\varepsilon R] \leqslant x\}.$$

Vamos mostrar que todo o elemento de $L_{\mathbb{R}}$ da forma $[a\varepsilon L] \wedge [b\varepsilon R]$, com $a, b \in \mathbb{Q}$, é menor ou igual a x. Considere-se o intervalo compacto $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Temos que

$$\begin{aligned} [a, b] \subseteq h^{\#}(x) &= \bigcup\{h(q\varepsilon L) \cap h(r\varepsilon R) \mid [q\varepsilon L] \wedge [r\varepsilon R] \leqslant x\} \\ &= \bigcup\{\,]q, r[\mid [q\varepsilon L] \wedge [r\varepsilon R] \leqslant x\}. \end{aligned}$$

Com a convenção de que $]q, r[= \emptyset$ se $r \leqslant q$. Assim, $[a, b] \subseteq]q_1, r_1[\cup \ldots \cup]q_n, r_n[$ pela compacidade de $[a, b]$, onde podemos supor que os intervalos $]q_i, r_i[$ são disjuntos. Logo, $[a, b] \subseteq]q_k, r_k[$ para algum k, o que implica $[a\varepsilon L] \wedge [b\varepsilon R] \leqslant [q_k\varepsilon L] \wedge [r_k\varepsilon R]$, e portanto $[a\varepsilon L] \wedge [b\varepsilon R] \leqslant x$. Considere-se agora o elemento $[q\varepsilon L]$, com $q \in \mathbb{Q}$. Veja-se que, pela condição iii', temos

$$[q\varepsilon L] = [q\varepsilon L] \wedge 1_{L_{\mathbb{R}}} = [q\varepsilon L] \wedge \bigvee_{q'} [q'\varepsilon R] = \bigvee_{q'} [q\varepsilon L] \wedge [q'\varepsilon R].$$

Uma vez que para todo o $q' \in \mathbb{Q}$ se tem $[q\varepsilon L] \wedge [q'\varepsilon R] \leqslant x$, então $[q\varepsilon L] \leqslant x$. Analogamente, pela condição i', podemos mostrar que $[q\varepsilon R] \leqslant x$, para todo $q \in \mathbb{Q}$. Conclui-se portanto que todos os geradores de $L_{\mathbb{R}}$ são menores ou iguais a x, de onde $x = 1_{L_{\mathbb{R}}}$. $\square$

Esta proposição tem como corolário imediato que:

Corolário 3.5 *$L_{\mathbb{R}}$ é espacial.*

Podemos agora concluir que a apresentação dos números reais que fizemos já trazia implícita a topologia usual de $\mathbb{R}$. Neste contexto, a topologia surge de uma forma natural na descrição dos pontos por meio de geradores e relações.

3.2 Conjunto de Cantor

O próximo exemplo é o conjunto ternário de Cantor que vamos designar por C. Este pode ser apresentado de uma forma simples como o conjunto de pontos de um locale. E mais uma vez a topologia surge implicitamente.

Vamos partir de alguns resultados conhecidos. Existe uma bijecção entre C e o espaço das sequências de $\{0,1\}$. Este é o espaço topológico produto de ω cópias de $\{0,1\}$ com a topologia discreta e encontra-se munido de funções $\pi_n : \{0,1\}^\omega \to \{0,1\}$ para $n \in \mathbb{N}$, designadas por projecções. Na realidade os espaços C e $\{0,1\}^\omega$ são homeomorfos, o que nos vai permitir trabalhar apenas com o segundo. Pode encontrar-se uma demonstração destes resultados em [8, pág. 162].

Considere-se o locale L_C gerado pelos simbolos "$s_n = 0$"e "$s_n = 1$", com $n \in \mathbb{N}$, onde a injecção de geradores $[\_] : G \to L_C$ verifica:

i. $[s_n = 0] \wedge [s_n = 1] = 0_{L_C}$;

ii. $[s_n = 0] \vee [s_n = 1] = 1_{L_C}$.

Os pontos são mais uma vez as aplicações do conjunto de geradores em 2 que preservam as relações.

Dado um ponto $p \in pt(L_C)$ note-se que

$$p(s_n = 0) = 1 \text{ se e só se } p(s_n = 1) = 0$$

Defina-se a sequência S_p onde a n-ésima posição é 0 se $p(s_n = 0) = 1$ e 1 se $p(s_n = 1) = 1$. S_p é uma sequência de $\{0,1\}$ bem definida. Facilmente se observa que dados dois pontos p e q diferentes, então $S_p \neq S_q$. Assim, defina-se a aplicação injectiva

$$\begin{array}{rcl} f : pt(L_C) & \to & \{0,1\}^\omega \\ p & \mapsto & S_p \end{array}$$

Por outro lado, dada uma sequência S, podemos definir $p_S : G \to 2$ tal que $p_S^{-1}(1) = \{s_n = \pi_n(S) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Proposição 3.6 $p_S \in pt(L_C)$.

Prova. É necessário verificar que p_S satisfaz as condições i e ii.

i. Supondo $p_S(s_n = 0) \wedge p(s_n = 1) = 1 \Rightarrow p_S(s_n = 0) = p_S(s_n = 1) = 1,$
$\Leftrightarrow \pi_n(S) = 0 \text{ e } \pi_n(S) = 1,$
o que é absurdo.

Logo $p_S(s_n = 0) \wedge p_S(s_n = 1) = 0$;

ii. $p_S(s_n = \pi_n(S)) = 1$ e $\pi_n(S) \in \{0,1\}$, logo $p_S(s_n = 0) \vee p_S(s_n = 1) = 1$.

$\square$

Veja-se agora que para toda a sequência S de $\{0,1\}$ temos $S = f(p_S)$. Basta notar que:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad p_S(s_n = \pi_n(S)) = 1 \quad \Rightarrow \quad \pi_n(f(p_S)) = \pi_n(S).$$

Isto mostra que f é sobrejectiva e permite concluir que existe uma bijecção entre os pontos de L_C e as sequências de $\{0,1\}$. A proposição seguinte diz que na realidade temos mais.

Proposição 3.7 *$pt(L_C)$ é homeomorfo a $\{0,1\}^\omega$.*

Prova. Vamos mostrar que $f : pt(L_C) \to \{0,1\}^\omega$ é contínua e aberta. Seja $O \in \{0,1\}^\omega$. Umas vez que temos um espaço topológico produto, O pode ser escrito a partir dos abertos elementares. Porque f^{-1} preserva uniões e intersecções, para mostrar que $f^{-1}(O)$ é um aberto, basta mostrar que as imagens inversas por f dos abertos elementares são abertos. Note-se que os abertos elementares são da forma $\pi_n^{-1}(0)$ ou $\pi_n^{-1}(1)$, para algum n.

$$\begin{aligned}
f^{-1}(\pi_n^{-1}(0)) &= \{p \mid f(p) = S_p \in \pi_n^{-1}(0)\} \\
&= \{p \mid \pi_n(S_p) = 0\} \\
&= \{p \mid p([s_n = 0]) = 1\} \\
&= \mathcal{U}_{[s_n=0]} \in \Omega pt(L_C)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f^{-1}(\pi_n^{-1}(1)) &= \{p \mid f(p) = S_p \in \pi_n^{-1}(1)\} \\
&= \{p \mid \pi_n(S_p) = 1\} \\
&= \{p \mid p([s_n = 1]) = 1\} \\
&= \mathcal{U}_{[s_n=1]} \in \Omega pt(L_C)
\end{aligned}$$

Considere-se agora $\mathcal{U}_a$, com $a \in L_C$, um aberto de $pt(L_C)$. Podemos escrever a a partir dos geradores e das operações de supremo e ínfimo binário. Uma vez que $\mathcal{U}_{(\_)}$ é um homomorfismo de locales e tranforma os supremos em uniões e os ínfimos em intersecções, $\mathcal{U}_a$ pode ser escrito a partir dos abertos $\mathcal{U}_g$, onde g é um gerador, à custa de uniões e intersecções finitas. Por outras palavras, o conjuntos dos abertos $\mathcal{U}_g$ forma uma sub base da topologia.

Queremos mostrar que $f(\mathcal{U}_a)$ é um aberto de $\{0,1\}^\omega$; como f preserva uniões e intersecções, porque é injectiva, basta ver que $f(\mathcal{U}_{[s_n=0]})$ e $f(\mathcal{U}_{[s_n=1]})$

são abertos:

$$\begin{aligned} f(\mathcal{U}_{[s_n=0]}) &= \{f(p) \mid p([s_n = 0]) = 1\} \\ &= \{S_p \mid \pi_n(S_p) = 0\} \\ &= \pi_n^{-1}(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\mathcal{U}_{[s_n=1]}) &= \{f(p) \mid p([s_n = 1]) = 1\} \\ &= \{S_p \mid \pi_n(S_p) = 1\} \\ &= \pi_n^{-1}(1) \end{aligned}$$

Assim, $f : pt(L_C) \to \{0,1\}^\omega$ é um homeomorfismo. □

Vamos pensar nos elementos $[s_n = 0]$ e $[s_n = 1]$. Intuitivamente, estes representam os conjuntos $\{S \in \{0,1\}^\omega \mid \pi_n(S) = 0\}$ e $\{S \in \{0,1\}^\omega \mid \pi_n(S) = 1\}$ respectivamente, que constituem uma sub base da topologia de $\{0,1\}^\omega$. A Proposição 3.9 abaixo mostra que de facto $\Omega\{0,1\}^\omega$ é isomorfo a L_C.

Proposição 3.8 *L_C é espacial.*

Prova. Este resultado é consequência directa da observação feita no final da secção 2.7. Uma vez que a apresentação de L_C não recorre a operações de supremo infinitárias, este locale é coerente. Logo, pela Proposição 2.18, é espacial. □

Note-se que esta proposição corresponde, no caso do exemplo anterior, à Proposição 3.4 e corolário subsequente. No entanto, nesse caso não é possível recorrer ao argumento aqui utilizado para justificar que $L_\mathbb{R}$ é espacial, uma vez que na apresentação por geradores e relações de $L_\mathbb{R}$ são utilizados supremos infinitários.

Proposição 3.9 *$\Omega\{0,1\}^\omega$ é isomorfo a L_C.*

Prova. Este resultado é uma consequência simples da proposição acima e de 3.7. Nesta última foi visto que $\Omega\{0,1\}^\omega \cong \Omega(pt(L_C))$. Uma vez que L_C é espacial, $\Omega\{0,1\}^\omega \cong L_C$. □

Tal como no exemplo anterior, mais uma vez a topologia surge naturalmente a partir da descrição dos pontos e não como algo colocado a posteriori.

Capítulo 4

Novos Locales

Neste capítulo estudam-se duas formas de obter novos locales a partir de outros. No seguimento do que foi feito até aqui continuamos a apresentar estes locales por geradores e relações, sempre tendo em mente que ao fazê-lo estamos a descrever imediatamente os pontos de um espaço.

4.1 Locale produto

Antes de definir o locale produto temos que nos situar na categoria em que estes produtos vão ser construídos. É nosso objectivo comparar o produto de espaços topológicos com o produto destes enquanto locales, isto é, o produto em **Sp**. Uma vez que esta categoria é dual de **Loc**, construir produtos em **Sp** é equivalente a construir coprodutos em **Loc**. Considere-se então uma família de locales L_k:

Definição 4.1 ${\prod^{\ell}}_k L_k$ é o locale gerado pela união disjunta dos conjuntos L_k, munida das injecções $p_k : L_k \to \coprod_k L_k$, e sujeito às relações:

i. $\bigvee_i [p_k(x_i)] = [p_k(\bigvee_i x_i)]$

ii. $[p_k(x)] \wedge [p_k(y)] = [p_k(x) \wedge p_k(y)]$

iii. $1_{{\prod^{\ell}}_k L_k} = [p_k(1_{L_k})]$

para cada p_k.

A definição deste locale já foi feita tendo em conta o que queremos que sejam os pontos. Um ponto do locale produto deve corresponder a uma família de pontos, um por cada locale. Os pontos de ${\prod^{\ell}}_k L_k$ são as aplicações do conjunto de geradores em 2 que respeitam as relações. Logo, uma função

$\coprod_k L_k \to 2$ que respeite i, ii e iii dá-nos uma familia de homomorfismos de locales $L_k \to 2$ para cada k. Reciprocamente, dados um ponto de cada locale L_k, podemos definir uma aplicação de $\coprod_k L_k$ em 2 que verifica as relações.

Proposição 4.2 *$\prod^{\ell}{}_k L_k$ é o coproduto em **Loc** dos locales L_k.*

Prova. Uma vez que este é único a menos de isomorfismo, vamos ver que $\prod^{\ell}{}_k L_k$ verifica a propriedade universal. Seja M um locale e considerem-se homomorfismos $q_k : L_k \to M$. Estes definem uma aplicação $q : \coprod L_k \to M$ tal que $q \circ p_k = q_k$. É fácil ver que q verifica as condições i, ii e iii, as três resultam de cada q_k ser um homomorfismo.

i. $\bigvee_i q(p_k(x_i)) = \bigvee_i q_k(x_i) = q_k(\bigvee_i x_i) = q(p_k(\bigvee_i x_i))$.

ii. $q(p_k(x)) \wedge q(p_k(y)) = q_k(x) \wedge q_k(y) = q_k(x \wedge y) = q(p_k(x) \wedge p_k(y))$.

iii. $q(p_k(1_{L_k})) = q_k(1_{L_k}) = 1_{\prod^{\ell}{}_k L_k}$.

Assim existe um único $q^\# : \prod^{\ell}{}_k L_k \to M$ tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} L_k \arrow[r, "p_k"] \arrow[drr, "q_k"'] & \coprod_k L_k \arrow[r, "{[-]}"] \arrow[dr, "q"] & \prod^{\ell}{}_k L_k \arrow[d, dashed, "q^\#"] \\ & & M \end{tikzcd}$$

Logo, $\prod^{\ell}{}_k L_k$ é o coproduto em **Loc** dos locales L_k. □

Vamos agora encontrar outra forma de construir o produto de locales, neste caso apenas produtos binários que designamos por $L \times_\ell M$. Este será dado pelo produto tensorial enquanto reticulados de supremos. Veja-se que **Loc** é subcategoria de **SL**.

Proposição 4.3 *Sejam L e M locales. $L \times_\ell M \cong L \otimes M$.*

Prova. $L \otimes M$ é um reticulado completo. Para mostrar que também é um locale é necessário clarificar qual é a operação de ínfimo. Esta pode ser vista como uma aplicação $(L \otimes M) \times (L \otimes M) \to (L \otimes M)$. Uma vez que num locale os ínfimos distribuem sobre os supremos, queremos que esta aplicação seja um bimorfismo. Assim, é boa ideia defini-la como um homomorfismo $(L \otimes M) \otimes (L \otimes M) \to (L \otimes M)$. Isto vai ser conseguido à custa das operações de ínfimo em L e M que podem ser definidas como homomorfismos

$$\wedge_L : L \otimes L \to L$$

$$\wedge_M : M \otimes M \to M,$$

o que permite definir

$$\begin{array}{rcl} \wedge_L \times \wedge_M : (L \otimes L) \times (M \otimes M) & \to & L \times M \\ ((a \otimes b), (x \otimes y)) & \mapsto & ((a \wedge_L b), (x \wedge_M y)) \end{array}$$

Note-se que esta aplicação também é um bimorfismo que pode ser factorizado através do produto tensorial. Se fizermos a composição com a função de $L \times M$ em $L \otimes M$ obtemos

$$\begin{array}{rcl} \wedge_L \otimes \wedge_M : (L \otimes L) \otimes (M \otimes M) & \to & L \otimes M \\ (a \otimes b) \otimes (x \otimes y) & \mapsto & (a \wedge_L b) \otimes (x \wedge_M y) \end{array}$$

Uma vez que $(L \otimes L) \otimes (M \otimes M)$ é isomorfo a $(L \otimes M) \otimes (L \otimes M)$ obtemos a aplicação "candidata" a ínfimo

$$\begin{array}{rcl} \wedge_{L \otimes M} : (L \otimes M) \times (L \otimes M) & \to & L \otimes M \\ ((a \otimes x), (b \otimes y)) & \mapsto & (a \wedge_L b) \otimes (x \wedge_M y) \end{array}$$

Se esta operação fôr de facto o ínfimo em $L \otimes M$ então este é um locale. É necessário verificar que $\wedge_{L \otimes M}$ é

i. comutativa

ii. associativa

iii. idempotente

iv. tem elemento neutro

v. verifica a lei da absorção[1]

As quatro primeiras são consequência directa da definição através de $\wedge_L$ e $\wedge_M$. Para v note-se que

$$\begin{array}{rcl} (a \otimes x) \wedge_{L \otimes M} ((b \otimes y) \vee (a \otimes x)) & = & ((a \otimes x) \wedge_{L \otimes M} (b \otimes y)) \vee (a \otimes x) \\ & = & ((a \wedge b) \otimes (x \wedge y)) \vee ((a \wedge b) \vee a) \otimes x) \\ & = & ((a \wedge b) \otimes (x \wedge y)) \vee ((a \wedge b) \otimes x) \vee (a \otimes x) \\ & = & ((a \wedge b) \otimes ((x \wedge y) \vee x)) \vee (a \otimes x) \\ & = & ((a \wedge b) \otimes x) \vee (a \otimes x) \\ & = & (((a \wedge b) \vee a) \otimes x) \\ & = & (a \otimes x) \end{array}$$

[1] A lei da absorção $a \wedge (b \vee a) = a = a \vee (b \wedge a)$ assegura que as operações de ínfimo e supremo são concordantes.

Para mostrar que o locale $L \otimes M$ é isomorfo a $L \times_\ell M$ vamos ver que verifica a propriedade universal deste último. Definam-se as injecções

$$\begin{array}{rcl} (\_) \times_\ell 1_M : L & \to & L \otimes M \\ a & \mapsto & a \otimes 1_M \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 1_L \times_\ell (\_) : M & \to & L \otimes M \\ x & \mapsto & 1_L \otimes x \end{array}$$

que são homomorfismos de locales. Considere-se agora um locale N e os homomorfismos $f : L \to N$ e $g : M \to N$. Defina-se

$$\begin{array}{rcl} h : L \times M & \to & N \\ (a, x) & \mapsto & f(a) \wedge g(x) \end{array}$$

Uma vez que,

$$\begin{array}{rcl} h(\bigvee_i a_i, x) & = & f(\bigvee_i a_i) \wedge g(x) \\ & = & \bigvee_i (f(a_i) \wedge g(x)) \\ & = & \bigvee_i h(a_i, x) \\ h(a, \bigvee_i x_i) & = & \bigvee_i h(a, x_i), \end{array}$$

h é um bimorfismo, logo, existe um único homomorfismo de sup-reticulados $h^\# : L \otimes M \to N$ que é o levantamento de h. Veja-se que

$$h^\#(a \otimes 1_M) = h(a, 1_M) = f(a) \wedge g(1_M) = f(a)$$

$$h^\#(1_L \otimes x) = h(1_L, x) = f(1_L) \wedge g(x) = g(x).$$

É ainda necessário confirmar que $h^\#$ é um homomorfismo de locales. Sabemos que preserva supremos; no entanto é necessário observar que

$$\begin{array}{rcl} h^\#((a \otimes x) \wedge_{L \otimes M} (b \otimes y)) & = & h^\#((a \wedge_L b) \otimes (x \wedge_M y)) \\ & = & f(a \wedge_L b) \wedge g(x \wedge_M y) \\ & = & (f(a) \wedge g(x)) \wedge (f(b) \wedge g(y)) \\ & = & h^\#(a \otimes x) \wedge h^\#(b \otimes y) \end{array}$$

Assim, $L \otimes M$ é o coproduto em **Loc** de L e M, logo isomorfo a $L \times_\ell M$. $\square$

Para terminar esta secção vamos fazer alguns comentários sobre como se relaciona o produto de espaços topológicos com o produto dos respectivos reticulados de abertos enquanto locales. A verdade é que dados espaços X e Y podemos identificar os elementos da forma $x \otimes y$ com rectângulos abertos de $\Omega(X \times Y)$, obtendo assim um homomorfismo sobrejectivo

$$\Omega(X) \times_\ell \Omega(Y) \to \Omega(X \times Y)$$

No entanto, este não é sempre um isomorfismo; para um exemplo veja-se Johnstone [5, pág. 61]. Um dos primeiros autores a estudar este assunto foi John Isbell [4], sugerindo que na realidade é $\Omega(X) \times_\ell \Omega(Y)$ que se comporta como o produto de dois espaços deveria. Em [6] Johnstone faz uma introdução a este problema.

Existe ainda outra razão para defender o produto de locales face ao produto em **Top**. Sabe-se que o Teorema de Tychonoff para um família de espaços topológicos é equivalente ao Axioma da Escolha. A compacidade é uma propriedade facilmente formulada para locales uma vez que se relaciona apenas com propriedades dos abertos. Dizemos que um elemento a de um locale L é **compacto** quando, para todo o $S \subseteq L$ tal que $\bigvee S = a$, existe um subconjunto finito $F \subseteq S$ tal que $\bigvee F = a$. O locale L diz-se compacto se 1_L o for. Mostra-se que, não só o equivalente para locales do teorema de Tychonoff é válido — o produto de locales compactos é compacto — como é independente do axioma da escolha. Este resultado é importante do ponto de vista da matemática construtiva, mas as suas implicações são maiores que simples considerações de natureza filosófica. Como é brevemente explicado em [6], existem contextos em matemática clássica onde o axioma da escolha ou a lei de terceiro excluído não estão disponíveis. Por exemplo, ao trabalhar em geometria algébrica com categorias de feixes, pois a lógica interna destas é intuicionista.

4.2 Hiperlocale

Dado um espaço topológico X, podemos construir um novo espaço tomando como pontos os subconjuntos fechados, isto é, $\{F \mid \overline{F} \in \Omega X\}$. Vamos designar este conjunto por $\mathrm{P}_L(X)$. Queremos definir uma topologia sobre este conjunto de pontos a partir da topologia de X. Para tal considere-se, para cada aberto $O \in \Omega(X)$, o conjunto $\mathcal{U}_O = \{F \mid F \cap O \neq \emptyset\}$. Estes conjuntos não formam uma topologia, nem sequer uma base, no entanto, vão ser a sub base do espaço que pretendemos.

Note-se contudo que, dada uma família de abertos O_i, tem-se

$$\bigcup_i \mathcal{U}_{O_i} = \mathcal{U}_{(\bigcup_i O_i)}$$

Isto é, a aplicação

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{(\_)} : \Omega(X) &\rightarrow \Omega(\mathrm{P}_L(X)) \\ O &\mapsto \mathcal{U}_O \end{aligned}$$

preserva supremos.

Dado um espaço X, vimos que $pt(\Omega(X))$ é um espaço sóbrio em que os pontos podem ser identificados com os subconjuntos fechados irredutíveis. O espaço $\mathrm{P}_L(X)$ tem como pontos todos os subconjuntos fechados. Será que este espaço é sóbrio? Antes de responder vamos introduzir o conceito de hiperlocale.

Por analogia com o que fizemos para os espaços topológicos podemos, dado um locale M, pensar no locale que se obtém deste preservando apenas os supremos. Ou seja, o locale que tem como geradores o próprio conjunto M e sujeito à relação

$$[\bigvee_i a_i] = \bigvee_i [a_i] \quad (a_i \in M).$$

Vamos designar este locale por **hiperlocale** de M, $\mathcal{P}_L(M)$. Os pontos deste locale são as aplicações $p : M \rightarrow 2$ que preservam supremos. Começamos por ver algumas propriedades relacionadas com estes.

Proposição 4.4 *$pt(\mathcal{P}_L(M))$ é ordem isomórfico a M^{op}.*[2]

Prova. Veja-se que os pontos de $\mathcal{P}_L(M)$ são as aplicações de M em 2 que preservam supremos, ou seja, os homomorfismos de sup-reticulados entre M e 2. Veja-se ainda que a ordem de especialização em $pt(\mathcal{P}_L(M))$ coincide com a ordem em $\mathbf{SL}(M, 2)$. Uma vez que $\mathbf{SL}(M, 2) \cong M^{op}$, o resultado segue imediatamente. □

No caso em que M é o reticulado de abertos de algum espaço topológico temos um resultado mais forte.

Proposição 4.5 *Seja X um espaço topológico. Os espaços $pt(\mathcal{P}_L(\Omega(X)))$ e $\mathrm{P}_L(X)$ são homeomorfos.*

[2]Consideramos $pt(\mathcal{P}_L(M))$ um conjunto parcialmente ordenado com a relação de ordem dada pela ordem de especialização da topologia.

Prova. Da proposição anterior e do facto de $\Omega(X)^{op}$ ser ordem-isomórfico ao reticulado dos subconjuntos fechados de X, isto é, $\mathrm{P}_L(X)$, existe um isomorfismo de ordem entre $pt(\mathcal{P}_L(\Omega(X)))$ e $\mathrm{P}_L(X)$. Este é dado por:

$$\begin{array}{rcccc} f: & \mathrm{P}_L(X) & \to & \Omega(X)^{\mathrm{op}} & \to & \mathrm{SL}(\Omega(X),2) \\ & c & \mapsto & \overline{c} & \mapsto & \mathrm{ann}_{\overline{c}} \end{array}$$

onde $\mathrm{ann}_U : \Omega(X) \to 2$ é a função definida por

$$\mathrm{ann}_U(V) = \begin{cases} 0 & \text{se } V \subseteq U \\ 1 & \text{em caso contrário.} \end{cases}$$

Note-se que ann_U, que designaremos por aniquilador de U, preserva supremos.

Para verificar que f é contínua basta verificar que a imagem inversa de um aberto sub básico qualquer é aberta, e uma vez que se trata de uma bijecção o mesmo é verdade para verificar que f é aberta. Ora, em $\mathrm{P}_L(X)$ um fechado c pertence ao aberto determinado por $O \in \Omega(X)$ se e só se $O \cap c \neq \emptyset$. Isto é equivalente a $O \nsubseteq \overline{c}$, que por sua vez é equivalente a dizer que $\mathrm{ann}_{\overline{c}}(O) = 1$, ou seja, a dizer que o ponto $\mathrm{ann}_{\overline{c}}$ pertence ao aberto determinado por O em $pt(\mathcal{P}_L(\Omega(X)))$, e portanto a função f é contínua e aberta. □

Podemos agora responder à pergunta que fizemos atrás. Veja-se que o resultado é uma consequência directa da proposição anterior.

Corolário 4.6 *O espaço* $\mathrm{P}_L(X)$ *é sóbrio.*

Prova. $\mathrm{P}_L(X)$ é homeomorfo ao espectro de um locale, nomeadamente do locale $\mathcal{P}_L(\Omega(X))$. Logo, pela Proposição 2.11, é sóbrio. □

Outra questão interessante seria determinar se o locale $\mathcal{P}_L(\Omega(X))$ é necessariamente espacial, ou, por outras palavras, se o operador $\mathcal{P}_L$ preserva a espacialidade, mas não abordarei esta questão. Limito-me a afirmar que é simples verificar que há um homomorfismo sobrejectivo $g : \mathcal{P}_L(\Omega(X)) \to \Omega(\mathrm{P}_L(X))$, que dos resultados anteriores coincide essencialmente com a espacialização, e portanto o locale $\mathcal{P}_L(\Omega(X))$ é espacial se e só se o homomorfismo g for injectivo.

Bibliografia

[1] Banaschewski, B., *The Real Numbers in Pointfree Topology*, Departamento de Matemática - Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, 1997.

[2] Birkhoff, G., *Lattice Theory*, American Mathematical Society, 1967.

[3] Fréchet, M., Sur quelques points du calc fontionel, *Rend. Circ. Mat. Palermo* 22 (1906) 1-71.

[4] Isbell, J., Atomless parts of spaces, *Math. Scand.* 31 (1972) 5-32.

[5] Johnstone, Peter T., *Stone Spaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 3, Cambridge University Press, 1982.

[6] Johnstone, Peter T., The point of pointless topology, *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society* 8 (1983) 41-53.

[7] Joyal, A. e Tierney, M., An extension of the Galois theory of Grothendieck, *Memoirs of the American Mathematical Society* 309 (1984).

[8] Sieradski, Allan J., *An Introduction to Topology and Homotopy*, PWS-KENT Publishing Company, 1992.

[9] Vickers, Steven, *Topology via Logic*, Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science 5, Cambridge University Press, 1989.

[10] Vickers, Steven, Toposes pour les vraiment nuls, 1996.

Índice